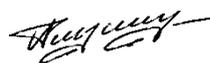


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
уравнений в частных производных  
и теории вероятностей



А.В. Глушко  
03.07.2020

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.В.ДВ.04.01 Дополнительные главы теории гармонических функций**  
*Код и наименование дисциплины в соответствии с Учебным планом*

1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:

01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки / специализация / магистерская программа:  
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей

6. Составители программы: доц., к.ф.-м.н. Ткачева С.А.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета  
Протокол № 0500-04 от 25.06.2020

*(наименование recommending structure, date, protocol number,*

*marks on extension are submitted in person)*

8. Учебный год: 2022/2023

Семестры 8

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:** Цель изучения учебной дисциплины: использование в профессиональной деятельности знаний из области учебной дисциплины «Дополнительные главы теории гармонических функций» .

Основными задачами учебной дисциплины являются формирование у студентов системы знаний о роли и месте учебной дисциплины «Дополнительные главы теории гармонических функций» в современном мире:

Задачами изучения дисциплины «Дополнительные главы теории гармонических функций» выступает приобретение

- основных методов решения задач математической физики, описывающих стационарные процессы механической природы

- умений использовать методы и результаты из различных областей анализа при исследовании решения эллиптических задач, а также вычислительные навыки, используемые при построении гармонических функций.

- а также основ применения методов решения эллиптических задач в изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

#### **10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:**

Учебная дисциплина «Дополнительные главы теории гармонических функций» входит в цикл профессиональных дисциплин (Б1), в вариативной части обучения, дисциплина Б1.В.ДВ; она непосредственно связана с такими дисциплинами как «Уравнения с частными производными», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Теория функций действительного переменного». Данная дисциплина показывает взаимообусловленность естественно-научных знаний в современном мире.

Приступая к изучению данной дисциплины, студенты должны иметь теоретическую и практическую подготовку по курсам ТФДП (в частности, таким ее разделам, как пространства, операторы), уравнениям с частными производными, математическому анализу.

#### **11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПКВ-4	Способность к определению целей и задач проводимых исследований, знание отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики, умение	ПКВ-4.1.	Применяет знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: основные задачи математической физики, корректную постановку задач.  Уметь: работать с различными источниками научной информации, отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики  Владеть: методами математического и моделирования при анализе математических моделей физических и механических задач для их дальнейшего применения
		ПКВ-4.2.	Анализирует и внедряет отечественный и международный опыт в данной области задач	Знать: зарубежную и отечественную литературу в области уравнений в частных производных, общие формы теории уравнений с частными производными  Уметь: грамотно и правильно представлять

	использовать отечественный и международный опыт в данной области задач			свои результаты Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ПКВ-4.3.	Формирует иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: основные методы решения задач в области уравнений с частными производными Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: Методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 2 / 72.**

**Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) зачет - 8 семестр**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			8 семестр	
Контактная работа		24	24	
в том числе:	лекции	12	12	
	практические	12	12	
	лабораторные	-	-	
	курсовая работа	-	-	
	контрольные работы	1	1	
Самостоятельная работа		48	48	
Промежуточная аттестация		-	-	
Итого:		<b>72</b>	<b>72</b>	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела. Гармонические функции. Первая и вторая формулы Грина. Теоремы о гармонических функциях.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>

		Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина. Лемма об устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
1.2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	Функция Грина, формулы представления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью формулы Грина. Свойства функции Грина Формула Пуассона решения внутренней задачи Дирихле для шара. Неравенство Гарнака.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
1.3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	Решение задачи Дирихле, задачи Неймана и третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
		Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя. Физический смысл потенциалов. Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала	
		Поверхности Ляпунова. Определение и технические оценки. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела. Постановка граничных задач. Интегральное представление функции с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа. Три свойства гармонических функций. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа, теоремы единственности решений краевых задач. Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина. Лемма об устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
2.2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	Функция Грина. Внутренняя задача Дирихле для шара. Симметричность функции Грина внутренней задачи Дирихле. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара. Примеры построения функций Грина методом отражений.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
2.3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	Основная формула теории гармонических функций. Решение задачи Дирихле, задачи Неймана и третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. Объемный потенциал, потенциалы простого	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>

	и двойного слоя. Объемный потенциал есть решение уравнения Пуассона $\Delta v(x_0) = -4\pi\rho(x_0)$ .	
	Поверхности Ляпунова. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.	электронный университет ВГУ, страница курса <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a>
	Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя. Нормальная производная потенциала простого слоя в случаях $x_0 \notin S$ и $x_0 \in S$ . Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы. Контрольная работа.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	4	4		16	24
2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	4	4		16	24
3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	4	4		16	24
	Итого:	12	12		48	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лабораторные занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. Лабораторные занятия реализуются в соответствии с рабочим учебным планом при последовательном изучении дисциплины.

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения текущих и промежуточных аттестационных испытаний студенту рекомендуется:

- выполнять все виды работ, предусмотренных рабочим учебным планом по дисциплине;
- выполнять домашние задания. Выполнение домашних заданий направлено на отработку навыков использования средств и возможностей изучаемой дисциплины. При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения выполнения задания, проанализировать полученные результаты. При необходимости обучающиеся имеют возможность задать вопросы преподавателю и разрешить возникшие трудности.

- посещать аудиторные лабораторные занятия;
- сдать тестовые задания по изученным темам.

При подготовке к контрольным работам рекомендуется использование учебной литературы, дополнительных файлов с теоретическим материалом по изучаемым темам (электронные файлы представлены на сайте кафедры). По всем темам представляются материалы, которые используются в аудиторной работе и при выполнении домашних заданий. В связи с тем, что активность обучающегося на лабораторных занятиях является предметом контроля его продвижения в освоении курса, то подготовка к таким занятиям требует ответственного отношения.

Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке и самостоятельной работе в аудитории.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: <a href="http://biblioclub.ru">http://biblioclub.ru</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
2	Владимиров В.С. Уравнения математической физики : учебник для студ. вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Изд. 2-е, стер. — М. : Физматлит, 2008 . — 398 с.
3	Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка : Учебное пособие для механико-матем. и физ.-мат. фак. ун-тов / М.М. Смирнов .— Минск : Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1974 .— 231 с.
4	Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики : Учеб. пособие для студ. механ.-мат. и физ. фак. ун-тов / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов — М. : Высш. шк., 1970 .— 710 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
5	<a href="http://mschool.kubsu.ru">http://mschool.kubsu.ru</a> – библиотека электронных учебных пособий. ( <a href="http://mschool.kubsu.ru/ms/1.htm">http://mschool.kubsu.ru/ms/1.htm</a> )
6	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a> электронный университет ВГУ, страница курса
7	<a href="http://www.kuchp.ru">http://www.kuchp.ru</a> – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
8	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http://www.lib.vsu.ru/</a> )

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Самостоятельная работа обучающегося направлена на самостоятельное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Самостоятельная работа с учебниками, учебно-методическими материалами, научной, справочной литературой, ресурсами сети Internet является наиболее эффективным методом получения знаний.

№ п/п	Источник
1	<a href="http://www.kuchp.ru">http://www.kuchp.ru</a> – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
2	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076</a> электронный университет ВГУ, страница курса

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6076> электронный университет ВГУ, страница курса

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой (ауд. 310), расположенный на 3 этаже учебного корпуса № 1, оснащенный

необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа.	ПКВ-4	ПКВ-4.1, ПКВ-4.2, ПКВ-4.3	Тестовое задание, контрольная работа, реферат
2	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	ПКВ-4	ПКВ-4.1, ПКВ-4.2, ПКВ-4.3	Тестовое задание, контрольная работа, реферат
3	Потенциалы. Поверхности Ляпунова	ПКВ-4	ПКВ-4.1, ПКВ-4.2, ПКВ-4.3	Тестовое задание, контрольная работа, реферат
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				Зачет выставляется при успешной сдаче тестового задания, написания контрольной работы и реферата на одну из предложенных тем

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Тестовые задания

Направление подготовки / специальность 01.03.01  
Математика  
 Дисциплина Б1.В.ДВ.04.01 Доп. главы теории гармонических функций  
 Курс 4  
 Форма обучения Очная  
 Вид контроля тест  
 Вид аттестации Текущая аттестация

УТВЕРЖДАЮ  
 зав. кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей  
  
 А.В. Глушко

#### 1. Задача

$$\Delta u = f(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \varphi(x)$$

#### Варианты ответов:

- А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана);  
 С) Третья краевая задача; D) нет правильного ответа

2. Формула  $\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$

#### Варианты ответов:

- А) Первая формула Грина; В) Вторая формула Грина; С) Третья формула Грина; D) нет правильного ответа

3. Задача  $\Delta u = f(x)$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x)$$

**Варианты ответов:**

- А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана);  
С) Третья краевая задача; D) нет правильного ответа

4. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа ( $n=2$ ,  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ )  
имеет вид

**Варианты ответов:**

- А)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$ ; В)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}$ ; С)  $u(x, y, z) = \frac{1}{2r}$ ; D)  $u(x, y, z) = \ln \frac{1}{r}$ ?

Преподаватель

С.А.Ткачева

### Контрольные работы:

Направление подготовки / специальность \_\_\_\_\_ 01.03.01 Математика  
Дисциплина Б1.В.ДВ.04.01 Доп. главы теории гармонических функций  
Курс 4  
Форма обучения Очная  
Вид контроля контрольная работа  
Вид аттестации Текущая

УТВЕРЖДАЮ  
зав. кафедрой уравнений  
в частных производных  
и теории вероятностей



А.В. Глушко

### Вариант 1

1. Задача

$$\Delta u = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = \varphi(x)$$

**Варианты ответов:**

- А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана);  
С) Третья краевая задача; D) нет правильного ответа

2. Формула  $\int_Q (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial Q} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$

**Варианты ответов:**

- А) Первая формула Грина; В) Вторая формула Грина; С) Третья формула Грина; D) нет  
правильного ответа

3. Задача  $\Delta u = f(x)$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x)$$

**Варианты ответов:**

- А) Первая краевая задача (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача (задача Неймана);  
С) Третья краевая задача; D) нет правильного ответа

4. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа ( $n=2$ ,  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ )  
имеет вид

**Варианты ответов:**

- А)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$ ; В)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}$ ; С)  $u(x, y, z) = \frac{1}{2r}$ ; D)  $u(x, y, z) = \ln \frac{1}{r}$ ?

Преподаватель

С.А.Ткачева

Направление подготовки / специальность 01.03.01 Математика  
 Дисциплина Б1.В.ДВ.04.01 Доп. главы теории гармонических функций  
 Курс 4  
 Форма обучения Очная  
 Вид контроля текущая аттестация  
 Вид аттестации Зачет

УТВЕРЖДАЮ  
 зав. кафедрой уравнений  
 в частных производных  
 и теории вероятностей  
А.В Глушко

### Контрольно-измерительный материал № 1

1. Задача

$$\Delta u = f(x)$$

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x)$$

**Варианты ответов:**

А) Первая краевая задача для уравнения Пуассона (задача Дирихле); В) Вторая краевая задача для уравнения Пуассона (задача Неймана); С) Третья краевая задача для уравнения Пуассона; D) нет правильного ответа

2. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа ( $n=3$ ,  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ ) имеет вид

А)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r}$ ;      В)  $u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}$ ;      С)  $u(x, y, z) = \frac{1}{2r}$ ;      D)  $u(x, y, z) = \ln \frac{1}{r}$ ?

3. Показать, что если функции  $u, v$  принадлежат  $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ , а функции  $\Delta u$  и  $\Delta v$

интегрируемы по  $Q$  то справедлива формула Грина  $\int_Q (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial Q} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$

Преподаватель \_\_\_\_\_ С.А. Ткачева

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести написание реферата, контрольные работы и тесты.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание*:

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

**Текущий контроль** предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных и тестовых заданий, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях, подготовкой письменного реферата из предложенных тем (по желанию обучающегося).

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

#### Описание технологии проведения

Тестирование и контрольные работы проводятся письменно.

#### Требование к выполнению заданий

Тестирование.

За выполнение каждого тестового задания испытуемому выставляются баллы. Номинальная шкала предполагает, что за правильный ответ к каждому заданию выставляется один балл, за неправильный – ноль. В соответствии с номинальной шкалой оценивается все задание в целом, а не какая-либо из его частей.

В соответствии с порядковой шкалой за каждое задание устанавливается максимальное количество баллов, например, три. Три балла выставляются за все верные выборы в задании; два балла – за одну ошибку; один балл – за две ошибки; ноль – за полностью неверный ответ.

Чтобы тест был сдан необходимо ответить правильно, необходимо правильно ответить:

- если в тесте 3 вопроса, то необходимо набрать 2 балла;

#### Контрольная работа

За контрольную работу ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающий выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «незачтено».

Написание реферата - ставится оценка «зачтено», при условии, что тема реферата раскрыта полностью, имеются ссылки на используемую литературу или интернет ресурсы.

## 20.2 Промежуточная аттестация

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Дополнительные главы теории гармонических функций» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Дополнительные главы теории гармонических функций» и степень сформированности компетенции. Критерии выставления зачета приведены ниже.

#### **Описание технологии проведения**

Весь теоретический материал курса содержится в следующих вопросах

№	Вопросы к промежуточной аттестации (зачет – 8 семестр)
01	Уравнения Лапласа и Пуассона, задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела.
02	Гармонические функции. определение
03	Первая и вторая формулы Грина.
04	Теоремы о гармонических функциях.
05	Преобразование Кельвина.
06	Лемма об устранимой особенности и теорема о поведении гармонической функции на бесконечности.
07	Функция Грина, свойства функции Грина
08	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

09	Неравенство Гарнака
10	Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара.
11	Решение задачи Дирихле, для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
12	Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
13	Решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.
14	Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.
15	Физический смысл потенциалов.
16	Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала.
17	Поверхности Ляпунова. Определение.
18	Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.
19	Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.
20	Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.

Для более глубокого изучения материала обучающимся предлагается написание реферата на одну из предложенных тем (по выбору обучающегося)

#### Темы рефератов

1. Объемный потенциал.
2. Потенциал простого слоя
3. Потенциал двойного слоя
4. Физический смысл потенциалов.
5. Теорема о непрерывности и дифференцируемости объемного потенциала.
6. Поверхности Ляпунова. Определение и технические оценки.
7. Потенциал двойного слоя. Существование прямого значения на границе потенциала двойного слоя.
8. Потенциал простого слоя. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.
9. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в окрестности границы.
10. Преобразование Кельвина. Сохранение гармоничности преобразованием Кельвина.
11. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара.
12. Гармоническая функция на бесконечности.

#### Требование к выполнению заданий

Критерии выставления оценок:

Оценки	Критерии
зачтено	обучающийся показывает свой интеллектуальный и общекультурный уровень, твердо знает предмет учебной дисциплины, логично излагает изученный материал, умеет применять теоретические знания для решения практических заданий, на вопросы билеты получены полные и верные ответы, приведено доказательство, но могут быть небольшие неточности в формулировках и затруднения при ответе на дополнительные вопросы, либо обучающийся показывает свой общекультурный уровень, в основном знает предмет учебной дисциплины, знает основные определения и термины, имеет определенные знания предмета, частично решает тестовые задания, также не может привести доказательства.
незачтено	степень освоения учебной дисциплины обучаемым не соответствует критериям, предъявляемым к оценке «зачтено»